BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

RİYAZİYYAT

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ДЛЯ СИСТЕМ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

М.Ф.МЕХТИЕВ, Н.Б.МАМЕДОВА, Я.А.ШАРИФОВ
Бакинский Государственный Университет
Институт Кибернетики НАН Азербайджана
Sharifov22@rambler.ru

Рассматривается задача оптимального управления, в которой состояние системы определяется из управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с двухточечными граничными условиями. Допустимые управления выбираются из класса ограниченных и измеримых функций. Вычислена формула приращения функционала второго порядка. На основе вариаций управления получены необходимые условия оптимальности для особых управлений в классическом смысле.

Введение. Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Нелокальными называют такие задачи, в которых вместо или вместе с граничным условием ставятся условия, связывающие значения решения (и, возможно, его производных) во внутренних точках области.

Исследование таких задач представляет интерес как с точки зрения развития общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений в математическом моделировании. Например, еще в 1896 году В.А.Стекловым были рассмотрены, в качестве математической модели охлаждения тела, задачи с нелокальными условиями, заданными как линейные комбинации значений искомой функции и ее производных в различных точках границы (см. [1], стр.9).

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями, возникающими в гидродинамике, рассматривал еще А.Зоммерфельд [2]. В последствии различные нелокальные задачи для различных классов уравнений рассматривались многими авторами.

В [3] рассмотрена новая нелокальная задача, возникающая в теории плазмы.

В 1980г. А.А.Самарским в случае произвольной области и общих нелокальных условий задача была сформулирована как нерешенная [4]. Отметим также работу [5], в которой отмечена важность развития теории нелокальных краевых задач.

До этого времени авторы, в основном, особое внимание уделяли разрешимости нелокальных задач и их спектральным свойствам.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления, где состояние управляемого объекта определяется как решение двухточечной краевой задачи, которая является естественным обобщением задачи Коши

1. Постановка задачи. Объектом исследования в данной работе являются задачи оптимального управления в системах нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями:

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t) \in R^n, \ t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$x(t_0) + Bx(t_1) = C, \tag{2}$$

здесь $f(x,u,t)$ - заданная n- мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с производными по x и u до второго порядка включительно, $B \in R^{n\times n}$, $C \in R^{n\times 1}$ - постоянные матрицы, $u(t) - r$ - мерный измеримый и ограниченный вектор управляющих воздействий на отрезке *T*. Предполагается, что почти всюду на этом отрезке управляющие воздействия удовлетворяют ограничению типа включения:

$$u(t) \in U, \ t \in T \ , \tag{3}$$

где U - открытое множество из пространства R^r .

Целью задачи оптимального управления является минимизация функционала

$$J(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_T F(x,u,t)dt \ , \tag{4}$$

определенного на решениях краевой задачи (1), (2) при допустимых управлениях, удовлетворяющих условию (3). Здесь предполагается, что скалярные функции $\varphi(x,y)$ *и* $F(x,u,t)$ непрерывны по своим аргументам и имеют непрерывные и ограниченные производные по x и y до второго порядка включительно.

Пусть при некоторых условиях краевая задача (1), (2) при каждом допустимом управлении $u(t) \in U, \ t \in T$, имеет единственное решение $x(t,u)$.

Замечание 1. Можно доказать, что если $B \neq \theta$, то при условиях

$$L(t_1 - t_0) + \|B\| < 1$$

краевая задача (1),(2) имеет единственное решение при каждом фиксированном допустимом управлении, где $L-$ коэффициент Липшица функции $f(x,u,t)$ по переменной x , $\theta-$ нулевая матрица.

Допустимый процесс $\{u(t), x(t,u)\}$, являющийся решением задачи (1)-(4), т.е. доставляющий минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3) будем называть оптимальным процессом, а $u(t)$- оптимальным управлением.

2.Формула приращения функционала. Исследование задачи оптимального управления (1)-(4) можно провести с использованием различных вариантов формулы приращения целевого функционала на двух допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{x} = x + \Delta x\}$. Метод приращений Л.И.Розоноэра [6], ставший уже классическим, позволяет получить в рассматриваемой задаче необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина [7]. Для получения необходимых условий оптимальности второго порядка для задачи Коши имеются методы получения формулы приращения второго порядка, предложенные в [8,9]. В этом пункте получим формулу приращения функционала второго порядка для задачи (1)-(4), основанную на [9] . Отметим, что при выводе необходимых условий оптимальности существенна локальность формулы приращения, т.е. остаточные члены оцениваются через величину, характеризующую малость меры области варьирования управления.

Необходимыми условиями оптимальности для задачи оптимального управления, описываемой системами обыкновенных дифференциальных уравнений с локальными условиями, можно ознакомится в $[10]$. Задачи оптимального управления с нелокальными условиями рассмотрены в работах [11-15].

Пусть $\{u, x = x(t,u)\}$ и $\{\tilde{u} = u + \Delta u,\ \tilde{x} = x + \Delta x = x(t,\tilde{u})\}$ два допустимых процесса. Можно определить краевую задачу в приращениях для задачи (1),(2):

$$\Delta\dot{x} = \Delta f(x,u,t),\ t \in T\ , \tag{5}$$

$$\Delta x(t_0) + B\Delta x(t_1) = 0\ , \tag{6}$$

где через

$$\Delta f(x,u,t) = f(\tilde{x},\tilde{u},t) - f(x,u,t)$$

обозначено полное приращение функции $f(x,u,t)$. Для частных приращений будем пользоваться обозначением:

$$\Delta_{\tilde{u}} f(x,u,t) = f(x,\tilde{u},t) - f(x,u,t).$$

Приращение функционала можно представить в виде:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \Delta\varphi(x(t_0), x(t_1)) + \int_T \Delta F(x,u,t)dt\ . \tag{7}$$

Проделаем ряд стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого и второго порядков:

- в формуле (7) добавим нулевые слагаемые

$$\int_T \langle \psi(t), \Delta\dot{x} - \Delta f(x,u,t)\rangle dt$$

и

$$\langle \lambda, \Delta x(t_0) + B\Delta x(t_1)\rangle\ ,$$

где $\psi(t) \in R^n,\ t \in T,\quad \lambda \in R^n$ - некоторые, пока неопределенные вектор-функция и постоянный вектор; через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначено скалярное произведение в R^n ;

- введем функцию Понтрягина

$$H(\psi,x,u,t) = \langle \psi(t), f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t);$$

-разложим приращение $\Delta\varphi(x(t_0), x(t_1))$ по формуле Тейлора второго порядка

$$\Delta\varphi(x(t_0),x(t_1)) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_0)}, \Delta x(t_0)\right\rangle + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x(t_1)}, \Delta x(t_1)\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)^2}\Delta x(t_0) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)}\Delta x(t_1), \Delta x(t_0)\right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)^2}\Delta x(t_1) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Delta x(t_0), \Delta x(t_1)\right\rangle + o_\varphi\left(\|\Delta x(t_0)\|^2, \|\Delta x(t_1)\|^2\right), \tag{8}$$

- частное приращение $\Delta_{\tilde{x}\tilde{u}} H(\psi, x, u, t)$ разложим по формуле Тейлора второго порядка относительно x:

$$\Delta_{\tilde{x}\tilde{u}} H(\psi, x, u, t) =$$
$$= \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u}, \Delta u(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2} \Delta x(t), \Delta x(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u \partial x} \Delta u(t), \Delta x(t) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2} \Delta u(t), \Delta u(t) \right\rangle + o_H \left(\|\Delta x(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 \right); \qquad (9)$$

-полное приращение $\Delta f(x,u,t)$ разложим по формуле Тейлора первого порядка относительно x и u :

$$\Delta_{\tilde{x}\tilde{u}} f(x,u,t) = \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u} \Delta u(t) + o_f \left(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\| \right). \qquad (10)$$

Теперь, пользуясь введенными обозначениями и учитывая (8)-(10) в (7), для приращения функционала получим формулу:

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = -\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u}, \Delta u(t) \right\rangle dt -$$
$$- \int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x} + \dot{\psi}(t), \Delta x(t) \right\rangle dt + \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - \psi(t_0) + \lambda \right], \Delta x(t_0) \right\rangle +$$
$$+ \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)} + \psi(t_1) + B'\lambda \right], \Delta x(t_1) \right\rangle +$$
$$- \int_T \left\langle \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} \Delta u(t) + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2}, \Delta x(t) \right\rangle dt -$$
$$- \int_T \left\langle \Delta u(t)' \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2}, \Delta u(t) \right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\langle \Delta x(t_0)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x(t_1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0) \partial x(t_1)}, \Delta x(t_0) \right\rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\langle \Delta x(t_0)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1) \partial x(t_0)} + \Delta x(t_1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)^2}, \Delta x(t_1) \right\rangle + \eta_{\tilde{u}}, \qquad (11)$$

где

$$\eta_{\tilde{u}} = -\int_T o_H \left(\|\Delta x(t)\|^2 + \|\Delta u(t)\|^2 \right) dt + o_\varphi \left(\|\Delta x(t_0)\|^2, \|\Delta x(t_1)\|^2 \right) -$$
$$- \frac{1}{2} \int_T \left\langle \Delta_{\tilde{u}} \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2} \Delta x(t), \Delta x(t) \right\rangle dt. \qquad (12)$$

Потребуем чтобы вектор-функция $\psi = \psi(t) \in R^n$ и постоянный вектор $\lambda \in R^n$ являлись решениями следующей сопряженной задачи (условие стационарности функции Лагранжа по состоянию):

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \quad t \in T, \tag{13}$$

$$\psi(t_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} + \lambda, \tag{14}$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)} - B'\lambda. \tag{15}$$

Замечание 2. Из равенств (14) и (15) видно, что из сопряженной системы можно исключить параметр λ. В результате для сопряженной системы (13) получаем следующее нелокальное краевое условие:

$$\psi(t_1) + B'\psi(t_0) = -B'\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)}.$$

Тогда формула приращения (11) принимает вид:

$$\Delta J(u) = -\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial u}, \Delta u(t) \right\rangle dt - \frac{1}{2}\int_T \left\langle \Delta u(t)' \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial u^2}, \Delta u(t) \right\rangle dt -$$

$$- \int_T \left\langle \Delta u(t)' \frac{\partial H^2(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} + \frac{1}{2}\Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x^2}, \Delta x(t) \right\rangle dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\langle \Delta x(t_0)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x(t_1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}, \Delta x(t_0) \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\langle \Delta x(t_0)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)} + \Delta x(t_1)' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)^2}, \Delta x(t_1) \right\rangle + \eta_{\tilde{u}}. \tag{16}$$

Вариации функционала. Пусть теперь $\Delta u(t) = \varepsilon \delta u(t)$, где ε -достаточно малое число, $\delta u(t)$ -некоторая кусочно-непрерывная функция. Тогда приращение функционала $\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u)$ при фиксированных функциях $u(t), \Delta u(t)$ есть функция параметра ε. Если справедливо представление

$$\Delta J(u) = \varepsilon \delta J(u) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 J(u) + o(\varepsilon^2), \tag{17}$$

то назовём $\delta J(u)$ первой вариацией, а $\delta^2 J(u)$ - второй вариацией функционала. Далее, получим явное выражение для первой и второй вариаций. Для достижения цели осталось выделить в $\Delta x(t)$, главный член по ε.

Положим

$$\Delta x(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon, t), \tag{18}$$

где $\delta x(t)$ -вариация траектории. Такое представление существует и для $\delta x(t)$ можно получить уравнение в вариациях. Действительно, при условии $\det(E + B) \neq 0$, по определению $\Delta x(t)$ имеем:

$$\Delta x(t) = [E + B]^{-1} \int_{t_0}^{t} \Delta f(x, u, t) dt - [E + B]^{-1} B \int_{t}^{t_1} \Delta f(x, u, t) dt. \tag{19}$$

Применяя к подынтегральному выражению формулу Тейлора, получаем:

$$\varepsilon\delta x(t) + o(\varepsilon,t) = [E+B]^{-1} \times$$
$$\times \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\left[\varepsilon\delta x(x) + o(\varepsilon,t)\right] + \varepsilon \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u + o_1(\varepsilon,t) \right] dt -$$
$$-[E+B]^{-1}\int_{t}^{t_1} \left\{ \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\left[\varepsilon\delta x(x) + o(\varepsilon,t)\right] + \varepsilon \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u + o_1(\varepsilon,t) \right\} dt. \tag{20}$$

Поскольку эта формула верна при любых ε, то

$$\delta x(x) = [E+B]^{-1}\int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u \right] dt -$$
$$-[E+B]^{-1}B\int_{t}^{t_1} \left[\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u \right] dt. \tag{21}$$

Отсюда, после дифференцирования, получаем линейное дифференциальное уравнение для вариации δx траектории

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u}\delta u \tag{22}$$

с граничным условием

$$\delta x(t_0) + B\delta x(t_1) = 0 . \tag{23}$$

Уравнение (22) с условиями (23) называют уравнением в вариациях. Подставим (18) в (16), имеем:

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial u}, \delta u(t) \right\rangle dt - \frac{\varepsilon^2}{2}\left\{ \int_T \left[\left\langle x'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2}, \delta x(t) \right\rangle \right.\right.$$
$$\left. + 2\left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x \partial u}, \delta x(t) \right\rangle + \left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial u^2}, \delta u(t) \right\rangle \right] dt -$$
$$-\left\langle \delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)\partial x H_2}, \delta x(t_0) \right\rangle -$$
$$\left. -\left\langle \delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_2)\partial x(t_0)} + \delta x'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_2)^2}, \delta x(t_2) \right\rangle \right\} + o(\varepsilon^2). \tag{24}$$

Вспоминая определение (17), окончательно получим:

$$\delta J(u) = -\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi,x,u,t)}{\partial u}, \delta u(t) \right\rangle dt, \tag{25}$$

$$\delta^2 J(u) = -\int_T \left[\left\langle \delta x'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2}, \delta x(t) \right\rangle + \right.$$
$$\left. + 2\left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x \partial u}, \delta x(t) \right\rangle + \left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial u^2}, \delta u(t) \right\rangle \right] dt +$$
$$+\left\langle \delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}, \delta x(t_0) \right\rangle + \left\langle \delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)} + \delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)^2}, \delta x(t_1) \right\rangle. \tag{26}$$

Вывод условий Лежандра-Клебша. Из (17) следует, что на оптимальном управлении $u^0(t)$ выполняются условия:

$$\delta J(u^0)=0,\ \delta^2 J(u^0)\geq 0\,. \tag{27}$$

Из первого условия (27) следует, что

$$\int_T \left\langle \frac{\partial H(\psi^0, x^0, u^0, t)}{\partial u}, \delta u(t)\right\rangle dt = 0. \tag{28}$$

Отсюда можно доказать, что вдоль оптимального управления выполняется равенство (см. [12], с. 54)

$$\frac{\partial H(\psi^0, x^0, u^0, t)}{\partial u}=0, \quad t\in T, \tag{29}$$

которое называется уравнением Эйлера. Из второго условия (27) следует, что вдоль оптимального управления выполняется неравенство:

$$\delta^2 J(u) = -\int_T \Bigg[\left\langle \delta x'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2}, \delta x(t)\right\rangle +$$

$$+2\left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u}, \delta x(t)\right\rangle + \left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial u^2}, \delta u(t)\right\rangle \Bigg] dt +$$

$$+\left\langle \delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)^2} + \Delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}, \delta x(t_0)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \delta x'(t_0)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)\partial x(t_0)} + \delta x'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x(t_1)^2}, \delta x(t_1)\right\rangle \geq 0. \tag{30}$$

Неравенство (30) является неявным необходимым условием оптимальности второго порядка. Однако, практическая ценность условия (30) в такой форме невелика, так как для его реализации требуются трудоемкие вычисления.

Для получения легко проверяемых условий оптимальности второго порядка, введем матриц - функцию:

$$R(\tau,s)=\Phi^{-1'}(\tau)\Big[\Phi(t_1)(E+B\Phi(t_1))^{-1}\Big]'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_1)^2}\Phi(t_1)(E+B\Phi(t_1))^{-1}\Phi^{-1}(s)+$$

$$+\Phi^{-1'}(\tau)\Big[(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\Big]'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)^2}(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)+$$

$$+\Phi^{-1'}(\tau)\Big[(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\Big]'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Phi(t_1)(E+B\Phi(t_1))^{-1}\Phi^{-1}(s)+$$

$$+\Phi^{-1'}(\tau)\Big[(E+B\Phi(t_1))^{-1}\Phi(t_1)\Big]'\frac{\partial^2\varphi}{\partial x(t_0)\partial x(t_1)}\Phi(t_1)(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi^{-1}(s)+$$

$$+\Phi^{-1'}(\tau)\Big[(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\Big]'\times$$

$$\times\int_T \Phi'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x^2}\Phi(t)dt(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)+$$

$$+\Phi^{-1'}(\tau)\int\limits_{\max(\tau,s)}^{t_1}\Phi'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\tau)}{\partial x^2}\Phi(t)dt\Phi^{-1}(s)-$$

$$-\Phi^{-1'}(\tau)\int\limits_{\tau}^{t_1}\Phi'(\xi)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi)}{\partial x^2}\Phi(\xi)d\xi(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\Phi^{-1}(s)-\text{где}$$

$$-\Phi^{-1}(\tau)\left[(E+B\Phi(t_1))^{-1}B\Phi(t_1)\right]'\int\limits_{\tau}^{t_1}\Phi'(\xi)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\xi)}{\partial x^2}\Phi(\xi)d\xi\Phi^{-1}(s);$$

матриц функция $\Phi(t)$, $t\in T$, является решением следующего матричного дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t)=\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial x}\Phi(t)$$

с начальным условием

$$\Phi(t_0)=E\ .$$

Тогда для второй вариации функционала получаем формулу:

$$\delta^2 J(u)=-\left\{\int\limits_T\int\limits_T\left\langle \delta' u(\tau)\frac{\partial' f(x,u,\tau)}{\partial u}R(\tau,s)\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u},\delta u(s)\right\rangle d\tau ds+\right.$$

$$+\int\limits_T\left\langle \delta' u(\tau)\frac{\partial^2 H(\varphi,x,u,t)}{\partial u^2},\delta u(t)\right\rangle dt+$$

$$+2\int\limits_T\int\limits_T\left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u}\Phi(t)(E+B\Phi(t_1))^{-1}\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u},\delta u(s)\right\rangle dtds+$$

$$\left.+\int\limits_T\left\langle\int\limits_t^{t_2}\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\tau)}{\partial x\partial u}\Phi(\tau)d\tau\Phi^{-1}(t)\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u},\delta u(s)\right\rangle dt\right\}. \qquad (31)$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если допустимое управление $u(t)$ удовлетворяет условию (28), то для его оптимальности в задаче (1)-(4) необходимо, чтобы неравенство

$$\delta^2 J(u)=-\left\{\int\limits_T\int\limits_T\left\langle \delta' u(\tau)\frac{\partial' f(x,u,\tau)}{\partial u}R(\tau,s)\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u},\delta u(s)\right\rangle d\tau ds+\right.$$

$$+\int\limits_T\left\langle \delta' u(\tau)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial u^2},\delta u(t)\right\rangle dt+$$

$$+2\int\limits_T\int\limits_T\left\langle \delta u'(t)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,t)}{\partial x\partial u}\Phi(t)(E+B\Phi(t_1))^{-1}\Phi^{-1}(s)\frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u},\delta u(s)\right\rangle dtds+$$

$$\left.+\int\limits_T\left\langle\int\limits_t^{t_2}\delta u'(\tau)\frac{\partial^2 H(\psi,x,u,\tau)}{\partial x\partial u}\Phi(\tau)d\tau\Phi^{-1}(t)\frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u},\delta u(t)\right\rangle dt\right\}\geq 0 \qquad (32)$$

выполнялось для всех $\delta u(t)\in L_\infty[t_0,t_2]$.

Из условия (32) следует аналог условия Лежандра-Клебше для рассматриваемой задачи

Теорема 2. Вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$ для всех $v \in R^r$ и $\theta \in [t_0, t_2]$

$$v' \frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u^2} v \le 0. \tag{33}$$

Для доказательства (33) построим вариацию управления:

$$\delta u(t) = \begin{cases} v - u(t) & при \quad t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0 & при \quad t \notin [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \tag{34}$$

где $\varepsilon > 0$, v - некоторый r - мерный вектор.

В силу (22), (23) соответствующая вариация траектории равна

$$\delta x(t) = a(t)\varepsilon + o(\varepsilon, t), \; t \in T = [t_0, t_2], \tag{35}$$

где $a(t)$ - непрерывная ограниченная функция.

Подставив вариацию (35) и соотношения (34) в (31), выделим главный член по ε. Тогда

$$\delta^2 J(u) = -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon} v' \frac{\partial^2 H(\psi(t), x(t), u(t), t)}{\partial u^2} v dt + o(\varepsilon) = -\varepsilon v' \frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u^2} v + o_1(\varepsilon).$$

Отсюда, с учетом второго условия из (27), получаем критерий Лежандра-Клебша (33).

Условие (33) является необходимым условием второго порядка. Очевидно, когда правая часть системы (1) линейна относительно управляющих параметров, то условие (33) также вырождается, т.е. выполняется тривиально. В силу [8,9], если для всех $\theta \in (t_0, t_2)$, $v \in R^r$

$$\frac{\partial H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u} = 0, \quad v' \frac{\partial^2 H(\psi(\theta), x(\theta), u(\theta), \theta)}{\partial u^2} v = 0, \tag{36}$$

то допустимое управление $u(t)$ называется особым в классическом смысле управлением.

Теорема 3. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} v' \Bigg\{ & \int_T \int_T \left\langle \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u} R(t,s), \frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u} \right\rangle dt ds + \\ & + 2 \int_T \int_T \left\langle \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} \Phi(t) \left(E + B\Phi(t_1)\right) - 1 \Phi^{-1}(s), \frac{\partial f(x,u,s)}{\partial u} \right\rangle dt ds + \\ & + \int_T \left\langle \int_t^{t_2} \frac{\partial^2 H(\psi, x, u, t)}{\partial x \partial u} \Phi(\tau) d\tau \Phi^{-1}(t), \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u} \right\rangle dt \Bigg\} v \le 0 \end{aligned} \tag{37}$$

выполнялось для всех $v \in R^r$.

Условие (37) является интегральным необходимым условием оптимальности для особых в классическом смысле управлений. Выбирая специальную вариацию по формуле (34), из (37) получим поточенные необходимые условия оптимальности.

Теорема 4. Для оптимальности особого в классическом смысле управления $u(t)$ в оптимальной задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\nu'\left[\frac{\partial f'(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u}R(\theta,\theta)\frac{\partial f(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u}+\right.$$
$$+2\frac{\partial^2 H(\psi(\theta),x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial x\partial u}\Phi(\theta)\big(E+B\Phi(t_1)\big)^{-1}\Phi^{-1}(\theta)\frac{\partial f(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u}+$$
$$\left.+\frac{\partial^2 H(\psi(\theta),x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial x\partial u}\frac{\partial f(x(\theta),u(\theta),\theta)}{\partial u}\right]\nu\le 0$$

выполнялось для всех $\nu\in R^r$ и $\theta\in(t_0,t_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006, 287с.
2. Sommerfeld A. Ein Beitag zur hydrodinamisen Erklarung dor turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math. (Roma, 1908). V.3. Roma: Reale Accad. Lincei, 1909, p.116-124.
3. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР, 1969, т. 185, №4 с.739-740.
4. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения,1980, т.16, №11, с.1925-1935.
5. Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems //Rocky Mountain J. of Math., 1975, v.5, p.493-542.
6. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика, 1959, тт.20-22, №10-12, с.1320-1334, 1441-1456, 1561-1578.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974, 271 с.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256с.
9. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 172с.
10. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002, 824с.
11. Васильева О.О., Мизуками К. Оптимальное управление краевой задачей //Известия высших учебных заведений, Математика, 1994, №12 (391), с.33-41.
12. Васильева О.О., Мизуками К. Динамические процессы, описываемые краевой задачей: необходимые условия оптимальности и методы решения //Известия РАН, Теория и системы управления, 2000, №1, с.95-100.
13. Ишмухаметов А.З., Мамедова Н.Б., Шарифов Я.А, Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений для систем с граничными условиями // Динамика неоднородных систем. Труды института системного анализа РАН, т. 32(1), 2008, с.59-73.
14. Sharifov Y.A. Necessary optimality conditions of the first and second order for systems with boundary conditions // Transactions of NAS of Azerbaijan issue mathematics and mechanics series of physical-technical and mathematical science, 2008, v.28, №1, p.189-198.
15. Сардарова Р.А., Шарифов Я.А. О необходимых условиях оптимальности для систем с многоточечными условиями. //Известия НАНА. Теория и системы управления, 2004, №2, с.66-70.

QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ SİSTEMLƏRDƏ KLASSİK MƏNADA İKİNCİ TƏRTİB OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA

M.F.MEHDİYEV, N.B.MƏMMƏDOVA, Y.Ə.ŞƏRİFOV

XÜLASƏ

İşdə ikinöqtəli sərhəd şərti ilə verilmiş adi diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Mümkün idarəedicilər ölçülən, məhdud funksiyalar sinfindən götürülmüşdür. Funksionalın ikinci tərtib artım düsturu tapılmışdır. İdarəedicilərin variasiyası hesabına klassik mənada məxsusi idarəedicilər üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

ABOUT NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS OF THE SECOND ORDER IN THE CLASSICAL SENSE FOR SYSTEMS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

M.F.MEHDIYEV, N.B.MAMMADOVA, Y.A.SHARIFOV

SUMMARY

The presented paper considers the optimal control problem wherein the state of a system is determined from the controller system of ordinary differential equations with two-point boundary conditions. Admissible controls are chosen from a class of bounded and measurable functions. Increment formula of the second order functional is calculated. On the basis of variations of the control we get necessary conditions for singular controls in the classical sense.